Одевающая цепочка для акустической спектральной задачи

В.Э. Адлер, А.Б. Шабат

14 апреля 2006

- преобразования Дарбу для акустической спектральной задачи
- приложения к уравнениям

Дима [1]:	$w_t = w^3 w_{yyy}$
Камассы-Холма [2, 3]:	$4h_t - h_{zzt} + 2\varepsilon h_z = hh_{zzz} + 2h_z h_{zz} - 12hh_z$

- схема построения преобразований Бэклунда (ПБ) для уравнений с переменной сепарантой

$$u_t = A(u_{xxx}, u_{xx}, u_x, u, x, \alpha), \quad A_{u_{xxx}} \neq c(x).$$

[1] M. Kruskal. Nonlinear wave equations. In J. Moser, ed., *Dynamical systems, theory and applications, Lect. Notes in Phys.* ***38***, pp. 310–354, Heidelberg: Springer, 1975.

[2] A.S. Fokas, B. Fuchssteiner. Symplectic structures, their Bäcklund transformations, and hereditary symmetries. *Physica D* ***4*** (1981) 47–66.

[3] R. Camassa, D.D. Holm. An integrable shallow water equation with peaked solitons. *Phys. Rev. Lett.* ***71*** (1993) 1661–1664.

1 Введение

- Спектральная теория [4]

обобщённое уравнение Шрёдингера	$\varphi_{yy} = (q(y) - \lambda r^4(y))\varphi$	(gS)
уравнение Шрёдингера	$\psi_{xx} = (u(x) - \lambda)\psi$	(S)
акустическая спектральная задача	$\varphi_{yy} = -\lambda r^4(y)\varphi$	(A)
задача Камассы-Холма	$\chi_{zz} = (1 - \lambda R^4(z))\chi$	(CH)

(A) на конечном интервале [5]: $r > 0, \;\; r(-1) = r(1), \;\; r \in C^\infty([-1, 1])$

(A) на оси [6]: потенциал r отграничен от 0, функция $r - 1$ быстроубывающая

(CH) на оси [6, 7]: $R^4 = m + \omega > 0, \;\; \omega \geq 0, \;\; m$ быстроубывающая

[4] F. Calogero, A. Degasperis. Spectral transforms and solitons, Amsterdam: North-Holland, 1982.

[5] M.G. Krein. On inverse problems for an inhomogeneous string. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* ***82*** (1952) 669–672.

[6] R. Beals, D. Sattinger, J. Szmigielski. Acoustic scattering and the extended Korteweg-de Vries hierarchy. *Adv. Math.* ***140*** (1998) 190–206.

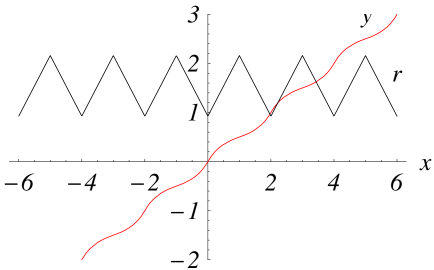
[7] A. Constantin. On the scattering problem for the Camassa-Holm equation. *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* ***457*** (2001) 953–970.

⚠ Локально все задачи сводятся друг к другу преобразованием Лиувилля, но оно портит рассматриваемые классы потенциалов

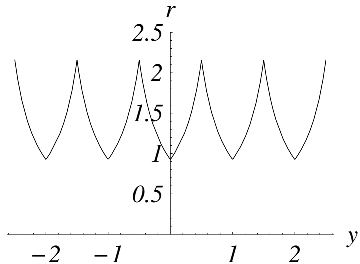
$$\varphi_{yy} = U\varphi \quad \leftrightsquigarrow \quad \widetilde{\varphi}_{\widetilde{y}\widetilde{y}} = \widetilde{U}\widetilde{\varphi}, \qquad d\widetilde{y} = a^2 dy, \quad \widetilde{\varphi} = a\varphi, \quad \widetilde{U} = \frac{U}{a^4} + \frac{a_{\widetilde{y}\widetilde{y}}}{a}$$

$$\begin{array}{lll}
(\mathsf{gS}) & \varphi_{yy} = (q(y) - \lambda r^4(y))\varphi & \\
& \quad\updownarrow & dx = r^2 dy, \quad \psi = r\varphi, \quad u = q/r^4 + r_{xx}/r \\
(\mathsf{S}) & \psi_{xx} = (u(x) - \lambda)\psi & \\
& \quad\updownarrow & dx = r^2 dy, \quad \psi = r\varphi, \quad r = \psi^{(0)} \qquad (1) \\
(\mathsf{A}) & \varphi_{yy} = -\lambda r^4(y)\varphi & \\
& \quad\updownarrow & y = \tanh z, \quad \varphi = \chi \operatorname{sech} z, \quad r = R\cosh z \qquad (2) \\
(\mathsf{CH}) & \chi_{zz} = (1 - \lambda R^4(z))\chi &
\end{array}$$

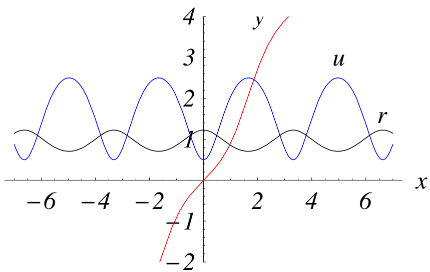
Пример 1. Образ периодического δ-образного потенциала.



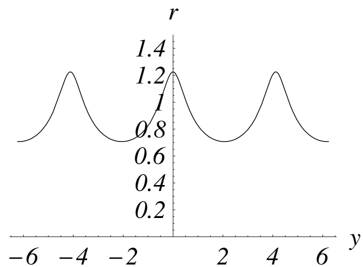
$\rightsquigarrow$



Образ кноидального потенциала.



$\rightsquigarrow$



- Алгебро-геометрические, много-солитонные, пиконные решения

⚠ Все известные точные решения записываются не явно, а в параметрическом виде.

⚠ Большинство точных решений сингулярны, то есть имеют особенности и/или "неправильную" асимптотику

---

[8] L.A. Dmitrieva. Finite-gap solutions of the Harry Dym equation. *Phys. Lett. A* ***182:1*** (1993) 65–70.

[9] L.A. Dmitrieva. The higher-times approach to multisoliton solutions of the Harry Dym equation. *J. Phys. A* ***26*** (1993) 6005–6020.

[10] A. Constantin, H.P. McKean. A shallow water equation on the circle. *Comm. Pure Appl. Math.* ***52*** (1999) 949–982.

[11] M.S. Alber, Yu.N. Fedorov. Algebraic geometrical solutions for certain evolution equations and Hamiltonian flows on nonlinear subvarieties of generalized Jacobians. *Inverse Problems* ***17*** (2001) 1017–1042.

[12] M.S. Alber, R. Camassa, Yu.N. Fedorov, D.D. Holm, J.E. Marsden. The complex geometry of weak piecewise smooth solutions of integrable nonlinear PDE's of shallow water and Dym type. *Comm. Math. Phys.* ***221*** (2001) 197–227.

- Преобразования Дарбу-Бэклунда

Оператор Шрёдингера: ПД — эффективный инструмент для построения точно-решаемых потенциалов [13, 14, 15, ...]

Акустическая задача: [16, 17, 18]

ПД добавляют сингулярности

[13] G.L. Lamb, jr. Elements of soliton theory. New York: J. Wiley, 1980.

[14] A.B. Shabat. The infinite-dimensional dressing dynamical system. *Inverse Problems* ***8*** (1992) 303–308.

[15] A.P. Veselov, A.B. Shabat. Dressing chain and the spectral theory of Schrödinger operators. *Funct. Anal. Appl.* ***27:2*** (1993) 1–21.

[16] J. Schiff. The Camassa-Holm equation: a loop group approach. *Physica D* ***121*** (1998) 24–43.

[17] A.N.W. Hone. The associated Camassa-Holm equation and the KdV equation. *J. Phys. A* ***32*** (1999) L307–L314.

[18] R. Ivanov. Conformal properties and Bäcklund transform for the Associated Camassa-Holm equation. *arXiv:nlin.SI/0507005*.

2 Преобразования Дарбу

Преобразование Дарбу определяется по частному решению при $\lambda = \alpha$.

Утверждение 1. Уравнение (S) сохраняет вид при преобразовании

$$\hat{\psi} = \psi_x - f\psi, \quad f := \frac{\psi_x^{(\alpha)}}{\psi^{(\alpha)}}, \quad f_x + f^2 = u - \alpha, \quad \hat{u} = u - 2f_x. \tag{3}$$

Уравнение (A) сохраняет вид при преобразованиях

$$\hat{\varphi} = \frac{\varphi_y}{p} - \varphi, \quad p := \frac{\varphi_y^{(\alpha)}}{\varphi^{(\alpha)}}, \quad p_y + p^2 = -\alpha r^4, \quad \hat{r} = \frac{p}{r}, \quad \hat{r}^2 d\hat{y} = r^2 dy, \tag{4}$$

$$\bar{\varphi} = \varphi_y, \quad \bar{r} = 1/r, \quad d\bar{y} = r^4 dy. \tag{5}$$

$\alpha \neq 0$: преобразования (3) и (4) сопряжены преобразованием Лиувилля (1).

$\alpha = 0$: (5) эквивалентно (3) при $\psi^{(0)} = r$;

(4) эквивалентно (3) при $\psi^{(0)} = r\int r^{-2}dx + cr \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^{(0)} = y + c$.

3 Одевающие цепочки

Рассмотрим итерации преобразования Дарбу. Полагая $\hat{f}_n = f_{n+1}$ и исключая u_n из (3) получаем одевающую цепочку

$$f_{n+1,x} + f_{n,x} = f_n^2 - f_{n+1}^2 + \alpha_n - \alpha_{n+1}. \tag{6}$$

Аналогично, полагая

$$\hat{r}_n = -\gamma_n r_{n+1}, \quad \hat{y}_n = \gamma_n^{-2} y_{n+1}, \quad -\gamma_n^2 = \alpha_n, \quad dx = r_n^2 dy_n$$

и исключая p_n из (4), получаем одевающую цепочку

$$(r_{n+1} r_n)_x = \gamma_n (r_{n+1}^2 - r_n^2), \quad y_{n,x} = r_n^{-2}. \tag{7}$$

Так как данные ПД эквивалентны, между цепочками должна быть какая-то связь.

Её удобнее всего сформулировать, введя потенциал v по формулам

$$2v_{n,x} = u_n, \quad v_n - v_{n+1} = f_n,$$

что приводит к следующей форме одевающей цепочки (6):

$$v_{n+1,x} + v_{n,x} = (v_{n+1} - v_n)^2 + \alpha_n. \tag{8}$$

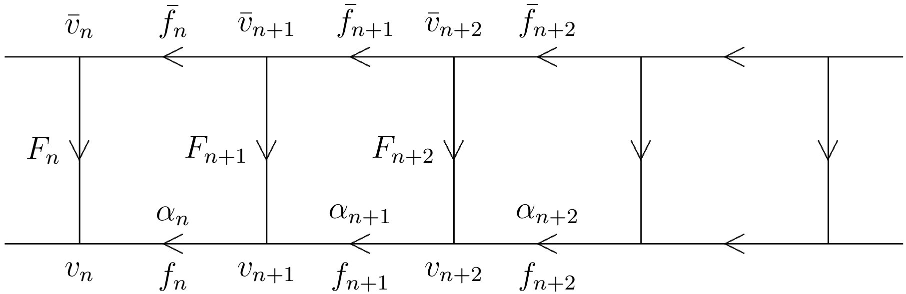


Рис. 1: две копии одевающей цепочки

Рассмотрим две копии одевающей цепочки (8), на переменные v_n и $\bar v_n$, связанные преобразованием Дарбу с нулевым параметром:

$$v_{n,x} + \bar v_{n,x} = (v_n - \bar v_n)^2.$$

Совместность этих уравнений с обеими копиями цепочки обеспечивается коммутативностью ПД [13], причём выполняются соотношения

$$(v_{n+1} - \bar v_n)(v_n - \bar v_{n+1}) = \alpha_n. \tag{9}$$

Разности f_n, $\bar f_n$ отождествляются с ориентированными горизонтальными рёбрами фигуры на рис. 1.

Несложно показать, что разности $F_n = v_n - \bar{v}_n$, отвечающие вертикальным рёбрам, удовлетворяют цепочке

$$F_{n+1,x} + F_{n,x} = (F_{n+1} - F_n)\sqrt{(F_{n+1} + F_n)^2 - 4\alpha_n}. \tag{10}$$

Цепочка (10) связана с (7) заменой $F_n = r_{n,x}/r_n$.

Соотношение (9) эквивалентно квадратному уравнению относительно f_n. Решая его, получаем подстановки в цепочку (6).

Утверждение 2. Общие решения цепочек (6), (10) и (7) связаны подстановками

$$F_n = \frac{r_{n,x}}{r_n}, \quad s_n := \sqrt{(F_{n+1} + F_n)^2 - 4\alpha_n} = \gamma_n\Big(\frac{r_{n+1}}{r_n} + \frac{r_n}{r_{n+1}}\Big), \quad \alpha_n = -\gamma_n^2,$$
$$2f_n = F_n - F_{n+1} - s_n, \quad f_n = \frac{r_{n,x} - \gamma_n r_{n+1}}{r_n}.$$

Для переменных y_n можно выписать отдельную цепочку. Деля (7) на $r_{n+1}^2 r_n^2$ и интегрируя, получаем формулу (постоянные интегрирования убираются сдвигом $y_n \to y_n + c_n$)

$$\frac{1}{\gamma_n r_{n+1} r_n} = y_{n+1} - y_n,$$

которая означает, что для нахождения всех y_n *достаточно одной квадратуры*. Эти уравнения можно переписать также в виде

$$y_{n+1,x} y_{n,x} = \gamma_n^2 (y_{n+1} - y_n)^2. \tag{11}$$

Замена $\bar{r}_n = 1/r_n$, порождённая преобразованием (5), эквивалентна обращению вертикальных стрелок на рис. 1 и приводит к цепочкам

$$(\bar{r}_{n+1}\bar{r}_n)_x = \gamma_n(\bar{r}_{n+1}^2 - \bar{r}_n^2), \quad \bar{y}_{n+1,x}\bar{y}_{n,x} = \gamma_n^2(\bar{y}_{n+1} - \bar{y}_n)^2, \quad \bar{y}_{n,x} = \bar{r}_n^{-2}.$$

Для переменных $\bar{y}_n$ имеем рекуррентную формулу

$$\bar{y}_{n+1} - \bar{y}_n = r_{n+1} r_n / \gamma_n.$$

4 Уравнение Дима

Одевающие цепочки вида

$$u_{n+1,x} = b(u_{n,x}, u_n, u_{n+1}, \alpha_n), \tag{12}$$

задают преобразования Бэклунда для уравнений типа КдФ

$$u_t = A(u_{xxx}, u_{xx}, u_x, u, x, \alpha). \tag{13}$$

Примеры:

$$f_{n+1,x} + f_{n,x} = f_n^2 - f_{n+1}^2 + \alpha_n - \alpha_{n+1}, \qquad f_t = f_{xxx} - 6(f^2+\alpha) f_x \tag{mKdV}$$

$$y_{n+1,x} y_{n,x} = \gamma_n^2 (y_{n+1} - y_n)^2, \qquad y_t = y_{xxx} - \frac{3y_{xx}^2}{2y_x} \tag{Schwarz-KdV}$$

$$(r_{n+1} r_n)_x = \gamma_n (r_{n+1}^2 - r_n^2), \qquad r_t = r_{xxx} - \frac{3r_{xx} r_x}{r} \tag{14}$$

Что такое преобразование Бэклунда?

Ответ: Уравнения (12), (13) должны быть совместны. Это равносильно тождеству

$$D_x(A[n+1]) = b_{u_{n,x}} D_x(A[n]) + b_{u_n} A[n] + b_{u_{n+1}} A[n+1],$$

где производные от u_{n+1} исключены в силу (12).

Равенство коэффициентов при $u_{n,xxxx}$ даёт соотношение

$$A_{u_{xxx}}[n+1] = A_{u_{xxx}}[n].$$

Величина $A_{u_{xxx}}^{-1/3}$ называется сепарантой уравнения (13). Если она зависит только от x, то уравнение приводится к виду

$$u_t = u_{xxx} + a(u_{xx}, u_x, u, x, \alpha). \tag{15}$$

В противном случае цепочка (12) не выводит за пределы конечно-параметрического семейства решений ОДУ вида $A_{u_{xxx}} = A_{u_{xxx}}[0] = c(x)$. Такое преобразование Бэклунда не может считаться полноценным.

Как устроены преобразования Бэклунда для уравнений с переменной сепарантой?

Ответ: следует считать x вспомогательным параметром и расширить цепочку вида (12) некоторым уравнением для независимых переменных y_n.

Пример такого расширения даёт цепочка (7)

$$(r_{n+1}r_n)_x = \gamma_n(r_{n+1}^2 - r_n^2), \quad y_{n,x} = r_n^{-2},$$

отвечающая уравнению Дима на переменную $w = r^{-2}$. Действительно, это уравнение связано с (14) следующей композицией преобразования годографа и двух введений потенциала

$$\begin{array}{ccc}
w_t = w^3 w_{yyy} & & r_t = r_{xxx} - \dfrac{3r_{xx}r_x}{r} \\
\Uparrow & & \Uparrow \\
x_y = \dfrac{1}{w}, \quad x_t = \dfrac{1}{2}w_y^2 - ww_{yy} & & y_x = \dfrac{1}{r^2}, \quad y_t = -\dfrac{2r_{xx}}{r^3} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
x_t = \dfrac{x_{yyy}}{x_y^3} - \dfrac{3x_{yy}^2}{2x_y^4} & \Leftrightarrow & y_t = y_{xxx} - \dfrac{3y_{xx}^2}{2y_x}
\end{array}$$

Замечание 1. Расширение цепочки может быть неединственным. Уравнение (14) допускает более общий потенциал:

$$y_x = ar^{-2} + br^2, \quad y_t = -2ar_{xx}r^{-3} + 2b(rr_{xx} - 2r_x^2).$$

Это можно использовать, чтобы сохранить вещественность при $r \sim e^{ig}$, что отвечает уравнениям sine-Гордон и мКдФ со знаком плюс перед нелинейным членом. Расширенная цепочка

$$g_{n+1,x} + g_{n,x} = 2\gamma_n \sin(g_{n+1} - g_n), \quad y_{n,x} = c + \sin 2g_n$$

задаёт ПБ для уравнения на $w = y_x$:

$$w_t = w^3 w_{yyy} - \frac{3}{2} w^2 D_y\Big(\frac{w_y^2(1 - c^2 + cw)}{(w-c)^2 - 1}\Big) \qquad\qquad g_t = g_{xxx} + 2g_x^3$$

$$\Uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow$$

$$x_y = \frac{1}{w}, \quad x_t = \frac{1}{2} w_y^2 - w w_{yy} + \frac{3w_y^2(1 - c^2 + cw)}{2((w-c)^2 - 1)} \qquad\qquad \begin{aligned} y_x &= c + \sin 2g, \\ y_t &= 2g_{xx}\cos 2g + 2g_x^2 \sin 2g \end{aligned}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$x_t = \frac{1}{x_y^3}\left(x_{yyy} - \frac{3x_{yy}^2(1 - 3cx_y + 2(c^2 - 1)x_y^2)}{2x_y((1 - cx_y)^2 - x_y^2)}\right) \quad \Leftrightarrow \quad y_t = y_{xxx} - \frac{3(y_x - c)y_{xx}^2}{2((y_x - c)^2 - 1)}$$

Замечание 2. Имеется гипотеза, что все интегрируемые уравнения вида (13) приводятся дифференциальными подстановками и контактными или точечными преобразованиями к уравнениям с постоянной сепаратной. Если это так, то ПБ для уравнений вида (13) можно получить из ПБ для уравнений (15) при помощи подходящего расширения. Интегрируемые уравнения вида (15) изучены очень хорошо и известно, что все они приводятся (преобразованиями, не меняющими x) к уравнению КдФ, Кричевера-Новикова или линейному. Соответственно, все одевающие цепочки сводятся в конечном счёте к нескольким базовым. О современном состоянии классификации уравнений (13) см. [19].

[19] R.H. Heredero. Classification of fully nonlinear integrable evolution equations of third order. *J. Nonl. Math. Phys.* ***12:4*** (2005) 567–585.

5 Представление нулевой кривизны

Пусть уравнение с переменной сепарантой имеет представление нулевой кривизны

$$\Phi_y = M\Phi, \quad \Phi_t = N\Phi \quad \Rightarrow \quad M_t = N_y + [N, M].$$

Так как ПБ меняет независимую переменную, заменяем ∂_y на производную по параметру x, не зависящему от n:

$$\partial_x = \rho_n \partial_{y_n}, \quad \partial_T = \partial_{t_n} + \sigma_n \partial_{y_n}, \quad \rho_n = y_{n,x}, \quad \sigma_n = y_{n,T}.$$

Тогда условие совместности линейных задач

$$\Phi_{n,x} = \rho_n M_n \Phi_n, \quad \Phi_{n+1} = L_n \Phi_n$$

определит расширенную одевающую цепочку

$$L_{n,x} = \rho_{n+1} M_{n+1} L_n - \rho_n L_n M_n, \quad y_{n,x} = \rho_n. \tag{16}$$

При заданной матрице M отсюда конструктивно находятся как множитель ρ_n, так и матрица L_n. Аналогично, t-часть преобразования Бэклунда определяется из условия совместности с линейной задачей

$$\Phi_{n,T} = (N_n + \sigma_n M_n)\Phi_n, \quad y_{n,T} = \sigma_n.$$

Например, уравнение Дима задаёт изоспектральную деформацию акустического уравнения (A):

$$\varphi_{yy} = -\lambda w^{-2}\varphi, \quad \varphi_t = 2\lambda w_y\varphi - 4\lambda w\varphi_y.$$

В матричной форме,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi_y \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda w^{-2} & 0 \end{pmatrix}, \quad N = 2\lambda \begin{pmatrix} w_y & -2w \\ 2\lambda w^{-1} + w_{yy} & -w_y \end{pmatrix}.$$

Продолжая преобразование Дарбу (4) на $\hat{\varphi}_{\hat{y}}$, получаем матрицу

$$L_n = \begin{pmatrix} \gamma_n & (r_{n+1}r_n)^{-1} \\ -\lambda r_{n+1}r_n & \gamma_n \end{pmatrix},$$

и (16) даёт уравнения цепочки вместе со связью

$$\rho_n = w_n = r_n^{-2}.$$

Наоборот, если положить $\deg_\lambda L_n = \deg_\lambda \det L_n = 1$, то и эта связь, и сама матрица L_n однозначно находятся из (16).

6 Уравнение Камассы-Холма

$$4h_t - h_{zzt} + 2\varepsilon h_z = hh_{zzz} + 2h_z h_{zz} - 12hh_z$$

Линейные задачи:

$$\chi_{zz} = (1 - \lambda R^4(z))\chi, \quad \chi_t = \frac{h_z}{2}\chi + \Big(\frac{1}{2\lambda} - h\Big)\chi_z, \quad R^4 := h_{zz} - 4h - \varepsilon.$$

Одевающая цепочка в переменных z, R получается преобразованием Лиувилля (2) из цепочки (11):

$$z_{n+1,x}z_{n,x} = \gamma_n^2 \sinh^2(z_{n+1} - z_n), \quad z_{n,x} = R_n^{-2}.$$

Закон сохранения $(R^2)_t + (R^2 h)_z = 0$ позволяет применить преобразование по решению

$$dx = R^2 dz - R^2 h dt \quad \Rightarrow \quad z_x = R^{-2}, \quad z_t = h \quad \Rightarrow$$
$$z_{xxt}z_x - z_{xt}z_{xx} = (4z_t + \varepsilon)z_x^3 + z_x. \tag{17}$$

Уравнение на z — ассоциированное уравнение Камассы-Холма [16, 17, 18].

Второе преобразование Бэклунда, без параметра, можно получить, как предельный случай. Чтобы избежать путаницы, будем обозначать его итерации верхним индексом. Соответствующая t-часть — цепочка типа Вольтерры [20, 21].

Утверждение 3. Следующая пара цепочек коммутирует:

$$z^m_x z^{m+1}_x = e^{2z^m - 2z^{m+1}}, \quad -8z^m_t = 2\varepsilon + e^{2z^{m+1}-2z^m} + e^{2z^m - 2z^{m-1}}. \tag{18}$$

Переменные z^m удовлетворяют в силу этих цепочек уравнению (17).

В переменных v:

$$v^m_x + v^{m+1}_x = (v^m - v^{m+1})^2, \quad v^m_t = (v^{m+1} - v^{m-1})^{-1} \quad \Rightarrow$$
$$2v_t v_{xxt} - v^2_{xt} - 8v_x v^2_t + 1 = 0.$$

Данное ПБ продолжает рис. 1 в вертикальном направлении, причём выполняется разностное уравнение (совместное с динамикой по t)

$$(v^m_{n+1} - v^{m+1}_n)(v^m_n - v^{m+1}_{n+1}) = \alpha_n.$$

[20] A.B. Shabat, R.I. Yamilov. Symmetries of nonlinear chains. *Len. Math. J.* ***2:2*** (1991) 377–399.

[21] R.I. Yamilov. Invertible substitutions generated by the Bäcklund transformations. *Theor. Math. Phys.* ***85:3*** (1990) 368–375.

7 Вронскианные формулы

Построение преобразований Дарбу по волновым функциям $\psi_1^{(\alpha_n)}$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
-D_x^2+u_1 & & -D_x^2+u_2 & & -D_x^2+u_3 & & \cdots & -D_x^2+u_n \\
\psi_1^{(\alpha_1)} & \to & 0 & & 0 & & \cdots & 0 \\
\psi_1^{(\alpha_2)} & \to & \psi_2^{(\alpha_2)} & \to & 0 & & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
\psi_1^{(\alpha_n)} & \to & \psi_2^{(\alpha_n)} & \to & \psi_3^{(\alpha_n)} & \to & \cdots & \psi_n^{(\alpha_n)}
\end{array}$$

Формулы Крама [22]:

$$\psi_{n+1}^{(\lambda)} = \frac{\Delta_n(\psi_1^{(\lambda)})}{\Delta_n}, \quad u_{n+1} = u_1 - 2D_x^2 \log \Delta_n,$$

где

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_n = \langle \psi_1^{(\alpha_1)}, \dots, \psi_1^{(\alpha_n)} \rangle, \quad \Delta_n(g) = \langle \psi_1^{(\alpha_1)}, \dots, \psi_1^{(\alpha_n)}, g \rangle,$$
$$\langle g_1, \dots, g_n \rangle := \det(D_x^{k-1}(g_j))|_{j,k=1}^n.$$

[22] M.M. Crum. Associated Sturm-Liouville systems. *Quart. J. Math. Oxford Ser. 2* ***6*** (1955) 121–127.

Формулы Крама продолжаются на все переменные, введённые в разделе 3. Прежде всего,

$$f_{n+1} = D_x \log\left(\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\right), \quad v_{n+1} = v_1 - D_x \log \Delta_n.$$

Так как r_1 является волновой функцией при $\lambda = 0$, то

$$\bar{v}_n = v_1 - D_x \log \Delta_{n-1}(r_1), \quad F_n = D_x \log\left(\frac{\Delta_{n-1}(r_1)}{\Delta_{n-1}}\right).$$

Для потенциалов и волновых функций акустического уравнения имеем параметрическое представление:

$$r_{n+1} = \frac{\Delta_n(r_1)}{\gamma_n \dots \gamma_1 \Delta_n}, \quad \varphi_{n+1}^{(\lambda)} = \frac{\Delta_n(\psi_1^{(\lambda)})}{\Delta_n(r_1)}, \quad y_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\gamma_k r_{k+1} r_k} + \int r_1^{-2}(\xi) d\xi, \tag{19}$$

$$\bar{r}_{n+1} = \frac{1}{r_{n+1}}, \quad \bar{\varphi}_{n+1}^{(\lambda)} = \frac{\Delta_n(r_1, \psi_1^{(\lambda)})}{\Delta_n}, \quad \bar{y}_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_{k+1} r_k}{\gamma_k} + \int r_1^2(\xi) d\xi. \tag{20}$$

Пример 2. Пусть $u_1 = c^2$, $\alpha_n = c^2 - \varkappa_n^2$, где $0 < \varkappa_1 < \cdots < \varkappa_{N-1} < \varkappa_N = c$. В качестве волновых функций примем

$$\psi_1^{(\alpha_n)} = \begin{cases} \cosh(\varkappa_n x + \delta_n), & n = 2k-1 \\ \sinh(\varkappa_n x + \delta_n), & n = 2k \end{cases}, \qquad r_1 = \psi_1^{(\alpha_N)} = \psi_1^{(0)}.$$

Тогда

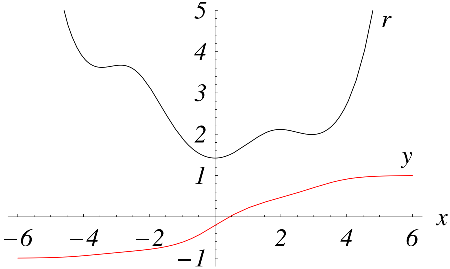
$$\Delta_n \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \Delta_n \sim e^{(\varkappa_1 + \cdots + \varkappa_n)|x|}, \quad x \to \infty.$$

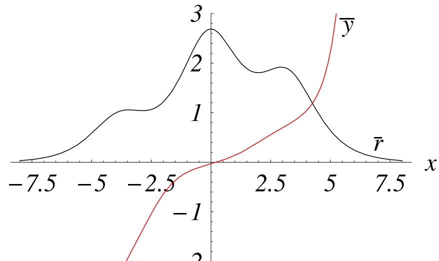
Так как $\Delta_{N-1}(r_1) = \Delta_N$, то потенциалы $u_N = c^2 - 2D_x^2 \log \Delta_{N-1}$ и $\bar{u}_N = c^2 - 2D_x^2 \log \Delta_N$ — обычные многосолитонные потенциалы, приподнятые на c^2.

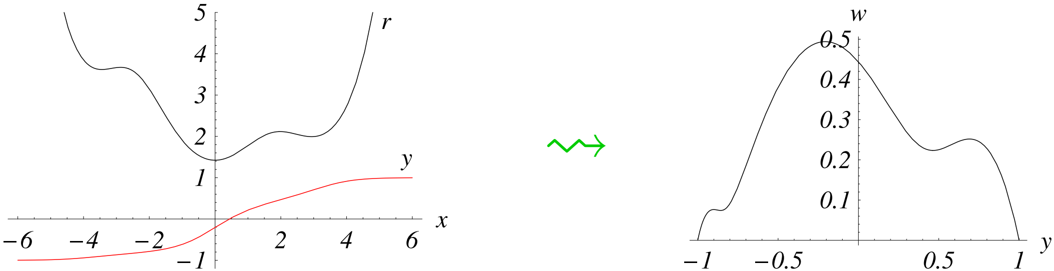
Потенциалы акустической задачи, как функции от x, имеют асимптотику

$$r_N \sim \cosh cx, \quad \bar{r}_N \sim \operatorname{sech} cx.$$

Функции y_N, $\bar{y}_N$ строго монотонно возрастают, но y_N ограничена, а $\bar{y}_N$ растёт на бесконечности, как $\sinh 2cx$. Рассмотрим эти случаи отдельно.







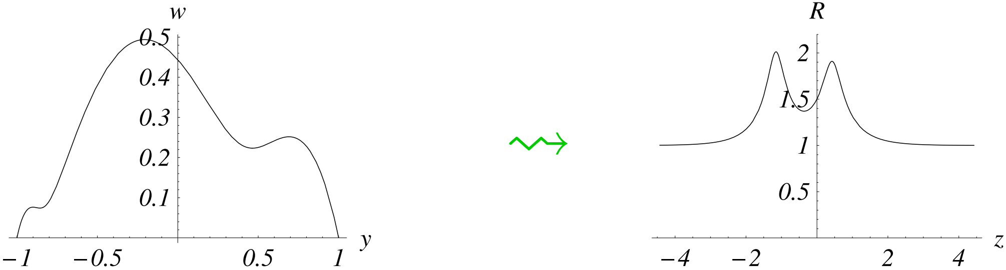
1) Выберем в (19) значение первообразной

$$
y_1 = \begin{cases} c^{-1}\tanh(cx+\delta_N) & \text{при } N = 2k-1 \\ c^{-1}\coth(cx+\delta_N) & \text{при } N = 2k \end{cases}
$$

Тогда масштабированная переменная $y = cy_N$ меняется от -1 до 1, и график $w(y) = cr_N^{-2}$ имеет вид финитной шапочки. Зависимость фаз от t вида

$$
\delta_n = \varkappa_n(4\varkappa_n^2 - 6c^2)t + \widetilde{\delta}_n, \quad \widetilde{\delta}_n = \mathrm{const} \tag{21}
$$

приводит к решению уравнения Дима на отрезке $[-1, 1]$ с нулевыми граничными условиями.

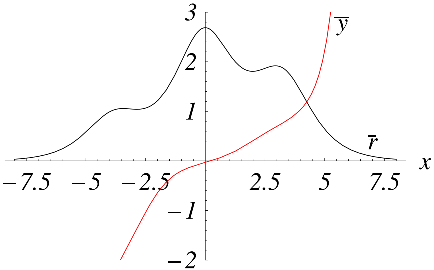


Применяя теперь преобразование Лиувилля (2), получаем функцию $R(z)$ в параметрическом виде

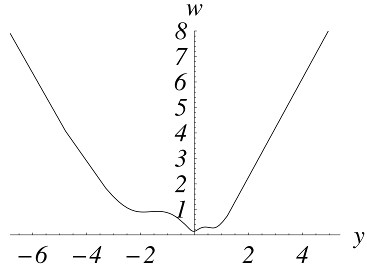
$$R = r_N(x)\sqrt{1 - y^2(x)}, \quad z = \frac{1}{2}\log\frac{1 + y(x)}{1 - y(x)}.$$

При этом один солитон “съедается” преобразованием. Зависимость фаз от t, отвечающая уравнению Камассы-Холма, имеет вид

$$\delta_n = \frac{\varkappa_n t}{2c(c^2 - \varkappa_n^2)} + \widetilde{\delta}_n, \quad n = 1, \ldots, N-1, \quad \delta_N = -\frac{(1 + \varepsilon c^2)t}{4c^2} + \widetilde{\delta}_N.$$

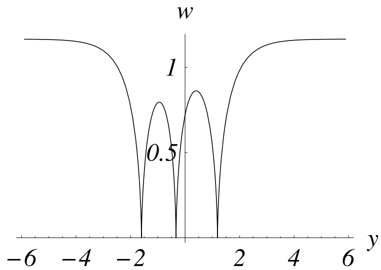


$\rightsquigarrow$



2) Функция $w(y) = r_N^2$, $y = \bar{y}_N$, асимптотически имеет линейный рост. Она задаёт решение уравнения Дима, если фазы δ_n зависят от t согласно формулам (21), а в качестве первообразной принято

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{4c}\sinh 2\delta_N + (-1)^{N-1}\left(\frac{x}{2} + 3c^2 t\right) + \mathrm{const}\,.$$



Пример 3. Пусть $u_1 = 0$, $\alpha_n = -\gamma_n^2$, где $\gamma_N = 0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_{N-1}$,

$$\psi_1^{(\alpha_n)} = \begin{cases} \cosh(\gamma_n x + 4\gamma_n^3 t + \delta_n), & n = 2k-1 \\ \sinh(\gamma_n x + 4\gamma_n^3 t + \delta_n), & n = 2k \end{cases}, \quad r_1 = \psi_1^{(0)} = 1.$$

Тогда функция $r_N(x) = \Delta_{N-1}(1)/\Delta_{N-1}$ имеет $N-1$ нуль. Полагая $\bar{y}_1 = x$, получим по формулам $w(y) = r_N^2$, $y = \bar{y}_N$ решение уравнения Дима с $N-1$ особенностью.

[23] V.S. Novikov. Reflectionless potentials of the acoustic spectral problem. *JETP Lett.* ***72:3*** (2000) 223–228.

8 Заключение

Основной вывод: цепочку ПБ для уравнения с переменной сепарантой удобно записывать в параметрическом виде, как двухкомпонентную цепочку на зависимую и независимую переменные.

Открытые задачи:

Уравнения, связанные со спектральной задачей Захарова-Шабата:

sine-Gordon $\Leftrightarrow$ уравнение сверх-коротких импульсов $v_{yt} = v + \frac{1}{6}(v^3)_{yy}$ [24, 25];

НШ $\Leftrightarrow$ двухкомпонентные аналоги уравнений Дима и Камассы-Холма [26, 27].

[24] R. Beals, M. Rabelo, K. Tenenblat. Bäcklund transformations and inverse scattering solutions for some pseudospherical surface equations. *Stud. Appl. Math.* ***81*** (1989) 125–151.

[25] T. Schäfer, C.E. Wayne. Propagation of ultra-short optical pulses in cubic nonlinear media. *Physica D* ***196*** (2004) 90–105.

[26] G. Falqui. On a Camassa-Holm type equation with two dependent variables. *arXiv:nlin.SI/0505059.*

[27] H. Aratyn, J.F. Gomes, A.H. Zimerman. On negative flows of the AKNS hierarchy and a class of deformations of a bihamiltonian structure of hydrodynamic type. *J. Phys. A: Math. Gen.* ***39*** (2006) 1099–1114.

? Спектральная задача Каупа-Купершмидта (3-го порядка): уравнение Дегаспериса-Прокеси [28, 29]

$$u_t - u_{xxt} = uu_{xxx} + bu_x u_{xx} - (b+1)uu_x, \quad b = 3$$

($b = 2$ — уравнение Камассы-Холма). Преобразование Дарбу более громоздко, см. напр. [30].

? Расширение цепочек преобразований Дарбу и Лапласа для $2+1$-мерных уравнений с переменной сепарантой. Пример: обобщение уравнения Дима [31, 32]

$$u_t + u^3 u_{xxx} + \frac{3}{u}\left(u^2 D_x^{-1}\left(\frac{u_y}{u^2}\right)\right)_y = 0.$$

[28] A. Degasperis, M. Procesi. Asymptotic integrability, in Symmetry and Perturbation Theory (eds. A. Degasperis, G. Gaeta), World Scientific (1999) 23–37.

[29] A. Degasperis, A.N.W. Hone, D.D. Holm. A new integrable equation with peakon solutions. *Theoret. Math. Phys.* ***133*** (2002) 1461–1472.

[30] V.E. Adler, V.G. Marikhin, A.B. Shabat. Canonical Bäcklund transformations and Lagrangian chains. *Theoret. Math. Phys.* ***129:2*** (2001) 163–183.

[31] V.G. Dubrovsky, B.G. Konopelchenko. $\bar\partial$-dressing and exact solutions for the $(2+1)$-dimensional Harry Dym equation. *J. Phys. A* ***27:13*** (1994) 4619–4628.

[32] L.A. Dmitrieva, M.A. Khlabystova. Multisoliton solutions of (2+1)-dimensional Harry Dym equation. *Phys. Lett. A* ***237:6*** (1998) 369–380.